PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 501 Statystyczna analiza porównawcza 1989

Marek Walesiak

PRZYCZYNEK DO METODY WYODRĘBNIANIA FAZ O STABILNYM KIERUNKU EWOLUOWANIA ELEMENTÓW W STRUKTURZE

Prezentowana praca stanowi uogólnienie metody wyodrębniania faz o stabilnym kierunku ewoluowania elementów w strukturze /zaprezentowanej w pracy [2] / na przypadek struktur złożonych i prostych prezentujących skalę lub kształt[1]. Ponadto zmodyfikowano w niej algorytm wyodrębniania faz o stabilnym i quasi-stabilnym kierunku ewoluowania elementów w strukturze.

1. Wstęp

Niech dany będzie zbiór obiektów badania A o elementach A_r (r = 1, ..., n), gdzie indeks r wyraża aspekt czasowy obiektu. Dla obiektu z każdego okresu r określono strukturę składającą się z k elementów.

W związku z tym, że bezpośrednie porównywanie struktur obiektów jest niemożliwe - ze względu na złożoność ich natury - wprowadza się pojęcie obrazów struktur obiektów, które w sposób pośredni umożliwiają ich porównanie.

Określenie obrazu struktury obiektu jest możliwe dzięki wprowadzeniu cechy strukturalnej, którą interpretuje się jako funkcję odwzorowującą zbiór struktur obiektów w zbiór ich obrazów.

Wprowadzenie obrazu struktury danego obiektu pozwala wyróżnić struktury proste oraz złożone. Podstawowa różnica między nimi sprowadza się do tego, że struktury proste opisane są za pomocą jednej cechy, natomiast złożone za pomocą zespołu cech. Dalsze rozważania - nie zmniejszając stopnia ich ogólności - dotyczyć będą struktur prostych, więc obrazy struktur obiektów można ująć w postaci macierzy:

---

[1] Pierwotna wersja metody dotyczyła tylko przypadku struktur prostych prezentujących kształt.

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} = \underset{\sim}{x}_1 \; \underset{\sim}{x}_2 \cdots \underset{\sim}{x}_n = \underset{\sim}{X}_{..} \qquad /1/$$

gdzie: $i,j = 1,\dots,k$ /numer elementu struktury/,
$r,s = 1,\dots,n$ /numer obiektu/,
x_{ir} - wartość liczbowa i-tego elementu w strukturze obiektu z okresu r-tego,
$\underset{\sim}{x}_r$ - liczbowy obraz struktury obiektu z okresu r-tego.

Ze względu na wygodę i pewne uzasadnienie logiczne obraz struktury obiektu często utożsamia się ze strukturą obiektu lub z samym obiektem /w skrócie zamiast określenia obraz struktury obiektu używa się nazwy struktura/. Obrazem struktury obiektu w interpretacji geometrycznej jest wektor lub punkt w przestrzeni k-wymiarowej. Jeśli zbiór cech jest w-elementowy /$w \geqslant 2$/, to obrazem struktury obiektu jest wektor lub punkt w przestrzeni wk-wymiarowej.

Sposób prezentacji danych liczbowych zawartych w macierzy /1/ pozwala podzielić struktury na [3] :

a/ prezentujące skalę,
b/ prezentujące kształt.

Struktura prezentuje skalę, gdy po unormowaniu cechy strukturalnej jej składowe wyrażają jej poziom; kształt zaś prezentuje wtedy, gdy po unormowaniu jej składowe wyrażają proporcje między poszczególnymi składowymi danej cechy.

Zanim zostaną przedstawione sposoby normowania cech strukturalnych należy określić warunki, jakie powinny one spełniać, aby umożliwiały prezentację kształtu oraz skali struktur [3].

Poprawna reguła normowania cech strukturalnych umożliwiająca <u>prezentację kształtu</u> powinna spełniać następujący warunek: jeśli kąt między wektorami $\underset{\sim}{x}_r$ i $\underset{\sim}{x}_s$ z macierzy /1/ jest równy 0^o, to dwie struktury obiektów prezentują kształt identyczny; kształt zbliżony będą one prezentować wtedy, gdy kąt ten nieznacznie będzie różnić się od 0^o.

Poprawna reguła normowania cech strukturalnych umożliwiająca z kolei <u>prezentację skali</u> powinna spełniać taki warunek, że jeśli odpowiadające sobie składowe wektorów $\underset{\sim}{x}_r$ i $\underset{\sim}{x}_s$ przyjmują te same wartości, to struktury obiektów prezentują identyczną skalę. Inaczej mówiąc: dwie struktury obiektów prezentują identyczną skalę wtedy i tylko wtedy, gdy kąt między wektorami $\underset{\sim}{x}_r$ i $\underset{\sim}{x}_s$ jest równy 0^o, a ich długość jest jednakowa. Będą one prezentować skalę zbliżoną wtedy, gdy kąt ten nieznacznie będzie różnić się od 0^0 i długości wektorów będą podobne.

Jeśli dwie struktury obiektów prezentują identyczną skalę, to również i kształt ich jest identyczny.

Sposoby normowania cech strukturalnych spełniające powyższe warunki można zapisać w postaci znanych formuł[2] /zakłada się, że cechy strukturalne prezentowane są na skali ilorazowej/:

$$p_{ir} = \frac{x_{ir}}{\sum_{j=1}^{k} x_{jr}}, \quad i=1,\ldots,k; \quad r=1,\ldots,n. \qquad /2/$$

$$p_{ir} = \frac{x_{ir}}{\sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{js}}, \quad i=1,\ldots,k; \quad r=1,\ldots,n. \qquad /3/$$

gdzie: p_{ir} - unormowana wartość i-tego elementu w strukturze z okresu r-tego.

Reguła normowania o postaci /2/ służy do prezentacji kształtu struktur, natomiast formuła /3/ umożliwia prezentację skali struktur. Reguły normowania /2/ i /3/ powodują, że każdy element macierzy danych po unormowaniu zawarty jest w przedziale domkniętym $\langle 0; 1 \rangle$ oraz spełnione są dla nich odpowiednio następujące relacje:

$$\sum_{i=1}^{k} p_{ir} = 1 \quad ; \quad \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} p_{ir} = 1 \quad . \qquad /4-5/$$

Unormowane w oparciu o formułę /2/ lub /3/ obrazy struktur obiektów o postaci /1/ przedstawia macierz:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kn} \end{bmatrix} = \underline{P} \quad . \qquad /6/$$

2. Opis metody zmodyfikowanej

Metoda wyodrębniania faz o stabilnym kierunku ewoluowania elementów w strukturze może dotyczyć struktur złożonych oraz prostych i to pre-

---

[2] Inną propozycję przedstawiono w pracy [3].

zentujących zarówno kształt, jak i skalę.

Najpierw przedstawiony zostanie sposób postępowania w tej metodzie dla przypadku struktur prostych, a następnie, poprzez prostą modyfikację, zostanie ona uogólniona na struktury złożone.

W celu rozwiązania kwestii sposobu badania stabilności kierunku ewoluowania struktury należy rozpatrzyć k ciągów typu $\{p_{i.}\} = (p_{i1}\ p_{i2}\ \dots\ p_{in})$, dla $i=1,\dots, k$. Jeżeli wszystkie, tzn. $\bigwedge_i$, ciągi $\{p_{i.}\}$ są monotonicznie rosnące lub malejące /dopuszcza się przypadek, w którym niektóre ciągi są stałe/, to struktura w okresie od $r=1$ do $r=n$ zachowuje stały kierunek zmian.

Miarę służącą do badania monotoniczności struktur /stałości kierunku przeobrażeń/ pokazano w pracy [2][3]:

$$K_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |p_{is} - p_{ir}|}{\sum_{t=r+1}^{t=s} \sum_{i=1}^{k} |p_{it} - p_{i(t-1)}|}, \quad r=1,\dots, n-1; \quad s=2,\dots, n; \quad s > r. \qquad /7/$$

Miara K_{sr} przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0; 1 \rangle$. $K_{sr} = 0$ oznacza, że struktura z okresu s-tego powróciła do stanu z okresu r-tego. Jeśli $\bigwedge_r \bigwedge_s K_{sr} = 1$, to wtedy dla $\bigwedge_i$ ciągi $\{p_{i.}\}$ zachowują stały kierunek przeobrażeń. Mianownik wyrażenia /7/ musi się różnić od zera, więc następujące bezpośrednio po sobie struktury, tj. z okresów $t-1$ i t muszą różnić się od siebie.

W celu wykrycia w strukturach z okresu od $r=1$ do $r=n$ faz o stałym kierunku przeobrażeń należy policzyć $0{,}5\, n(n-1)$ wartości miar /7/ i zestawić je w postaci tablicy $[K_{sr}]$:

$$[K_{sr}] = \begin{bmatrix} K_{21} & & & \\ K_{31} & K_{32} & & \\ \vdots & & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{n,n-1} \end{bmatrix}. \qquad /8/$$

Struktury z okresów od 1 do m tworzą jedną fazę o stałym kierunku przeobrażeń, gdy:

$$\bigwedge_{\substack{r \\ s>r}} \bigwedge_{s} K_{sr} = 1; \quad r=1,\dots, m-1; \quad s=1+1,\dots, m; \quad m \leqslant n. \qquad /9/$$

---

[3] Jest to modyfikacja miary zaproponowanej przez K. Kukułę [1, s.11-15].

W praktyce rzadko spotyka się struktury zmieniające się w sposób tak regularny, więc warunek /9/ modyfikuje się w sposób następujący:

$$\bigwedge_{r} \bigwedge_{\substack{s \\ s>r}} K_{sr} \geqslant \varsigma \quad ; \; r=1,\ldots, m-1 \; ; \quad s=l+1,\ldots, m \; ; \quad m \leqslant n \; ; \qquad /10/$$

gdzie: ς - z góry zadana wielkość bliska jedności /np. ς = 0,95/.

Struktury z okresów od 1 do m spełniające warunek /10/ tworzą fazę o quasi-stabilnym kierunku przeobrażeń.

Miara K_{sr} dla dwóch sąsiadujących w czasie struktur jest zawsze równa jeden /z wyjątkiem przypadku, gdy są one identyczne/. Wynika stąd wniosek, że o stabilności lub quasi- stabilności kierunku przeobrażeń w strukturach z okresów od 1 do m można mówić tylko wtedy, gdy $m \geqslant l+2$.

Fazy wyodrębniane według warunku /9/ lub /10/ nie spełniają postulatu ich rozłączności. Zgodnie z pierwotną propozycją zawartą w pracy [2] fazy tworzono więc chronologicznie, rozpoczynając od okresu pierwszego. Liczne badania empiryczne wykazały niedoskonałość takiego podejścia /zwłaszcza w przypadku wyodrębniania faz o quasi-stabilnym kierunku przeobrażeń/. W związku z tym proponuje się pewien algorytm wyodrębniania faz o stabilnym lub quasi-stabilnym kierunku przeobrażeń, który obejmuje następujące etapy:

1. Tworzy się wszystkie możliwe fazy spełniające warunek /9/ lub /10/.

2. Spośród faz wyodrębnionych w punkcie 1 wybiera się tę, która zawiera największą liczbę struktur. Jeśli jest kilka faz o maksymalnej liczbie struktur, to wybiera się tę, dla której funkcja:

$$\sum_{s} \sum_{\substack{r \\ s>r}} K_{sr} \quad ; \; r=1,\ldots, m-1 \; ; \quad s=l+1,\ldots, m \; ; \quad m \leqslant n \; ; \qquad /11/$$

przyjmuje wartość największą /warunek ten należy stosować, gdy wyodrębniane są fazy o quasi-stabilnym kierunku przeobrażeń/. W sytuacji, gdy fazy wyodrębniane są według warunku /9/ , tzn. o stabilnym kierunku przeobrażeń, kryterium pomocniczym będzie warunek chronologii /wybierana jest najpierw ta, która rozpoczyna się wcześniej/.

3. Wykreśla się wiersze i kolumny w tablicy $\left[K_{sr}\right]$ odpowiadające strukturom zawartym w wydzielonej fazie z kroku 2. Wraca się do kroku 1 i kontynuuje wydzielanie kolejnych faz.

Metoda wyodrębniania faz o stabilnym lub quasi-stabilnym kierunku przeobrażeń dla przypadku struktur złożonych wymaga modyfikacji polegającej na umieszczeniu przed wzorem /7/ dodatkowego sumowania po cechach i wprowadzenia do niego dodatkowego indeksu h /oznaczającego numer cechy/:

$$K'_{sr} = \frac{1}{w} \sum_{h=1}^{w} K_{sr}^{(h)} . \qquad /12/$$

Pozostałe czynności związane z wyodrębnieniem faz o stabilnym lub quasi-stabilnym kierunku przeobrażeń pozostają bez zmian.

Zagadnienie wydzielania faz o stabilnym lub quasi-stabilnym kierunku przeobrażeń jest bardziej skomplikowane dla struktur złożonych niż dla prostych. Otóż dla poszczególnych cech struktury złożonej mogą wystąpić fazy o quasi-stabilnym lub stabilnym kierunku przeobrażeń, ale nie muszą się one ze sobą pokrywać. W efekcie dla struktury złożonej opisanej przez te poszczególne cechy wspomniane fazy mogą nie wystąpić.

LITERATURA

[1] Kukuła K.: Przeobrażenia struktury rolniczych usług produkcyjnych w Polsce. "Wiadomości Statystyczne" 1986 nr 11.

[2] Walesiak M.: Metoda wyodrębniania faz o stabilnym kierunku ewoluowania elementów w strukturze. W: Statystyka-Ekonometria. Wrocław: AE 1988. Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu nr 447.

[3] Walesiak M.: Metody klasyfikacji w badaniach strukturalnych. Rozprawa doktorska. Wrocław: AE 1985 /maszynopis/.

EIN BEITRAG ZUR METHODE DER AUSSONDERUNG VON PHASEN MIT EINER STABILEN EVOLUIERUNGSRICHTUNG DER ELEMENTE IN DER STRUKTUR

Zusammenfassung

Diese Arbeit bildet eine Verallgemeinerung der Methode der Aussonderung von Phasen mit einer stabilen Evoluierungsrichtung der Elemente in der Struktur /die in der Arbeit [2] dargestellt wurde/ zu einem Fall der zusammengesetzten und einfachen Strukturen, die eine Skala oder eine Form darstellen. Es wurde auch der Algorithmus der Aussonderung von Phasen mit einer stabilen und quasi-stabilen Evoluierungsrichtung der Elemente in der Struktur modifiziert.

К ВОПРОСУ О МЕТОДАХ ВЫДЕЛЕНИЯ ФАЗ СО СТАБИЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ В СТРУКТУРЕ

Резюме

Работа становит обобщение метода выделения фаз со стабильным направлением эволюции элементов в стуктуре (представленной в работе /2/) на случай сложных и простых структур, представляющих шкалу или форму. Кроме того, в работе модифицировано алгоритм выделения фаз со стабильным и квазистабильным направлением эволюции элементов в структуре.