PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 447 Statystyka. Ekonometria 1988

Marek Walesiak

METODA WYODRĘBNIANIA FAZ O STABILNYM KIERUNKU EWOLUOWANIA ELEMENTÓW W STRUKTURZE

1. Wstęp

Warunki uzasadniające nazywanie jakiejś konstrukcji strukturą ekonomiczną można ująć w następujących podpunktach [2]:

a) struktura jest to całość, która składa się z elementów, przy czym całość w strukturze składa się z co najmniej dwóch elementów struktury, a zbiór tychże elementów spełnia warunki rozłączności (elementy struktury nie mają części wspólnych) oraz zupełności (suma elementów struktury tworzy całość);

b) struktura obrazuje określone relacje między elementami badanej całości oraz między poszczególnymi elementami a całością. Relacje te zwane prawami składania nadają całości własności odrębne od własności elementów;

c) struktura ma charakter dynamiczny (zmienia się w czasie), a proces zachodzących w niej przemian tworzy całość dzięki pewnemu związkowi zależności, który sprawia, że "nowa" struktura nie może powstać w oderwaniu od "starej". Ruch w czasie poszczególnych elementów całości zachowujących względną samodzielność prowadzi do zmian w "istniejących" strukturach i do powstania "nowych" struktur.

Niech dany będzie zbiór obiektów badania A o elementach A_r ($r = 1,2,\ldots,n$), gdzie indeks r wyraża aspekt czasowy obiektu. Dla obiektu z każdego okresu r określono strukturę składającą się z k elementów. Strukturę obiektu z r-tego okresu $S(A_r)$ przedstawia wektor $[K_j(A_r)]$:

$$[K_j(A_r)] = \begin{bmatrix} K_1(A_r) \\ K_2(A_r) \\ \vdots \\ K_k(A_r) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

gdzie: $K_j(A_r)$ - j-ty element struktury obiektu z okresu r-tego.

W celu lepszego zobrazowania istoty problemu można posłużyć się przykładem. Niech A_r oznacza województwo jeleniogórskie w roku r-tym a zbiór K grupy gałęzi przemysłu. Stąd

$$[K_j(A_r)] = [K_1(A_r)\, K_2(A_r) \ldots K_9(A_r)]^T =$$

$$\begin{bmatrix} \text{Przemysł paliwowo-energetyczny w woj. jeleniogórskim w roku r-tym} \\ \text{Przemysł metalurgiczny w woj. jeleniogórskim w roku r-tym} \\ \text{- -} \\ \text{Pozostałe gałęzie przemysłu w woj. jeleniogórskim w roku r-tym} \end{bmatrix}.$$

Przyporządkowanie każdemu obiektowi $A_r \in A$ struktury składającej się z k elementów zapisuje się jako następujące odwzorowanie

$$\begin{aligned} F:\ & A \longrightarrow S(A) && \text{zbiory} \\ & A_r \longrightarrow S(A_r) = [K_j(A_r)] && \text{elementy} \end{aligned}, \qquad (2)$$

gdzie: $S(A)$ - zbiór struktur obiektów; $F(A_r) = S(A_r) = [K_j(A_r)]$.

W związku z tym, że bezpośrednie porównywanie struktur obiektów jest niemożliwe - ze względu na złożoność ich natury - wprowadza się pojęcie obrazów struktur obiektów, które w sposób pośredni umożliwiają ich porównanie. Określenie obrazu struktury obiektu jest możliwe przez wprowadzenie cechy strukturalnej, którą interpretuje się jako funkcję odwzorowującą zbiór struktur obiektów w zbiór ich obrazów (por. [2]). W ujęciu formalnym cecha to odwzorowanie

$$\begin{aligned} I:\ & S(A) \longrightarrow E^k \subset R^k && \text{zbiory} \\ & S(A_r) \longmapsto x^T_{.r} && \text{elementy} \end{aligned}, \qquad (3)$$

gdzie: $I\,[S(A_r)] = x^T_{.r} = (x_{1r}\ x_{2r} \ldots x_{kr})^T \in E^k$; E^k - zbiór wektorów realizacji (obrazów) o wymiarach kx1; T - znak transpozycji.

Wprowadzenie ob[illegible] struktury danego obiektu pozwala wyróżnić struktury proste oraz zł[illegible]. Podstawowa różnica między nimi sprowadza się do tego, że struktury proste opisane są za pomocą jednej cechy, natomiast złożone za pomocą zespołu cech. W związku z tym, że dalsze rozważania dotyczyć będą struktur prostych, więc obrazy struktur obiektów można ująć w postaci macierzy $X_{..}$:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ - & - & - & - \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} = [x_{.1}\ x_{.2} \ldots x_{.n}] = X_{..} , \qquad (4)$$

gdzie: $i, j = 1, 2, \ldots, k$ (numer elementu struktury),
$r, s = 1, 2, \ldots, n$ (numer obiektu), x_{ir} - wartość liczbowa i-tego elementu w strukturze obiektu z okresu r-tego,
$x_{\cdot r}$ - liczbowy obraz struktury obiektu z okresu r-tego.

Ze względu na wygodę i pewne uzasadnienie logiczne obraz struktury obiektu często utożsamia się ze strukturą obiektu lub z samym obiektem (w skrócie zamiast określenia obraz struktury obiektu używa się krótkiego określenia struktura).

Obrazem struktury obiektu w interpretacji geometrycznej jest wektor lub punkt w przestrzeni k-wymiarowej.

Sposób prezentacji danych liczbowych zawartych w macierzy (4) pozwala podzielić struktury na [2] :

a) prezentujące skalę,

b) prezentujące kształt.

Struktura prezentuje skalę, gdy po unormowaniu cechy strukturalnej jej składowe wyrażają jej poziom. Z kolei prezentuje kształt wtedy, gdy po unormowaniu jej składowe wyrażają proporcje między poszczególnymi składowymi danej cechy. Ponieważ dalej będzie mowa o strukturach prezentujących kształt należy wyjaśnić jakie warunki powinny spełniać reguły normowania cech strukturalnych, aby umożliwiały prezentację kształtu struktur.

Poprawna reguła normowania cech strukturalnych umożliwiająca prezentację kształtu powinna spełniać taki warunek, że jeśli kąt między wektorami $x_{\cdot r}$ i $x_{\cdot s}$ z macierzy (4) jest równy 0°, to dwie struktury obiektów, tj. $S(A_r)$ i $S(A_s)$ prezentują identyczny kształt. Natomiast będą one prezentować zbliżony kształt, gdy kąt ten nieznacznie będzie różnić się od 0°.

Sposób normowania cech strukturalnych spełniający powyższy warunek można zapisać w postaci znanej formuły (zakłada się, że cechy strukturalne prezentowane są na skali ilorazowej):

$$p_{ir} = \frac{x_{ir}}{\sum_{j=1}^{k} x_{jr}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k; \quad r = 1, 2, \ldots, n; \tag{5}$$

gdzie: p_{ir} - unormowana wartość i-tego elementu w strukturze obiektu z okresu r-tego; $p_{ir} \in \langle 0, 1 \rangle$; $\sum_{i=1}^{k} p_{ir} = 1$.

Unormowane w oparciu o formułę (5) obrazy struktur obiektów o postaci (4) przedstawia macierz $P_{\cdot\cdot}$:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ - & - & - & - \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kn} \end{bmatrix} = P_{..} \qquad (6)$$

2. Opis metody

W celu rozwiązania kwestii sposobu badania stabilności kierunku ewoluowania struktury należy rozpatrzyć k ciągów typu $\{p_{i.}\} = (p_{i1}\ p_{i2} \cdots p_{in})$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Jeżeli wszystkie, tzn. $\bigwedge_i$, ciągi $\{p_{i.}\}$ są monotonicznie rosnące lub malejące (dopuszcza się przypadek, w którym niektóre ciągi są stałe) to struktura w okresie od $r = 1$ do $r = n$ zachowuje stały kierunek zmian.

Miarę służącą do badania monotoniczności struktur (stałości kierunku przeobrażeń) zaproponował K. Kukuła [1]

$$K_{s1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |p_{is} - p_{i1}|}{\sum_{t=2}^{t=s} \sum_{i=1}^{k} |p_{it} - p_{i(t-1)}|}, \quad s = 2, \ldots, n. \qquad (7)$$

Miara K_{s1} przyjmuje wartości z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$. $K_{s1} = 0$ oznacza, że struktura z okresu s-tego powróciła do stanu z okresu pierwszego. Jeśli $\bigwedge_s K_{s1} = 1$, to wtedy dla $\bigwedge_i$ ciągi $\{p_{i.}\}$ zachowują stały kierunek przeobrażeń w przedziale $\langle 1, n \rangle$.

Miara typu (7) będzie reagować nieprawidłowo, jeśli zajdzie sytuacja taka, że w strukturach z okresu od $r = 1$ do $r = n$ wystąpi kilka faz o stałym kierunku przeobrażeń lub tylko jedna ale rozpoczynająca się nie wcześniej niż od okresu drugiego (por. przykład). Kolumna pierwsza z tablicy (13) zawiera wartości miary K_{s1} dla $s = 2, \ldots, 10$. Na podstawie wartości miary K_{s1} można tylko wysnuć wniosek, że w okresie od 1 - 4 struktura zachowuje stały kierunek przeobrażeń. Natomiast dla struktur z przykładu wyraźnie można wyodrębnić 3 fazy o stałym kierunku przeobrażeń.

W tej sytuacji miarę (7) należy zmodyfikować w sposób następujący:

$$K_{sr} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |p_{is} - p_{ir}|}{\sum_{t=r+1}^{t=s} \sum_{i=1}^{k} |p_{it} - p_{i(t-1)}|}, \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots, n-1, \\ s = 2, \ldots, n, \\ s > r. \end{array} \qquad (8)$$

Mianownik wyrażenia (8) musi się różnić od zera, więc bezpośrednio następujące po sobie struktury, tj. z okresów t-1 i t muszą różnić się od siebie. We wzorze (7), który jest szczególnym przypadkiem wzoru (8) mianownik będzie zawsze różny od zera wtedy, gdy struktury z pierwszych dwóch okresów nie będą identyczne.

W celu wykrycia w strukturach z okresu od r = 1 do r = n faz o stałym kierunku przeobrażeń należy policzyć 0,5 n (n - 1) wartości miar (8) i zestawić je w postaci tablicy $[K_{sr}]$:

$$[K_{sr}] = \begin{bmatrix} K_{21} & & & \\ K_{31} & K_{32} & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & & \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{n,n-1} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Struktury z okresów od 1 do m tworzą jedną fazę o stałym kierunku przeobrażeń, gdy:

$$\bigwedge_{r} \bigwedge_{\substack{s \\ s>r}} K_{sr} = 1 \; ; \quad \begin{matrix} r = 1, \dots, m-1; \\ s = 1+1, \dots, m; \\ m \leqslant n. \end{matrix} \tag{10}$$

W praktyce rzadko spotyka się struktury zmieniające się w sposób tak regularny, więc warunek (10) modyfikuje się w sposób następujący:

$$\bigwedge_{r} \bigwedge_{\substack{s \\ s>r}} K_{sr} \geqslant \varrho \; ; \quad \begin{matrix} r = 1, \dots, m-1; \\ s = 1+1, \dots, m; \quad m \leqslant n. \end{matrix} \tag{11}$$

gdzie: ϱ - z góry zadana wielkość bliska jedności np. ϱ = 0,95.

Struktury z okresów od 1 do m spełniające warunek (11) tworzą fazę o quasi-stabilnym kierunku przeobrażeń.

Miara K_{sr} dla dwóch sąsiadujących w czasie struktur jest zawsze równa jeden (za wyjątkiem, gdy są one identyczne). Wynika stąd wniosek, że o stabilności lub quasi-stabilności kierunku przeobrażeń w strukturach z okresów od 1 do m można mówić tylko w przypadku, gdy m $\geqslant$ 1+2.

<u>Przykład</u>. Unormowane według formuły (5) obrazy struktur obiektów z 10 okresów przedstawia macierz:

$$\mathbb{P}_{..} = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}75 & 0{,}70 & 0{,}65 & 0{,}70 & 0{,}75 & 0{,}80 & 0{,}75 & 0{,}70 & 0{,}65 \\ 0{,}20 & 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}35 & 0{,}30 & 0{,}25 & 0{,}20 & 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}35 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Policzono 45 wartości miar (8) i zestawiono je w tablicy $[K_{sr}]$:

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & & & & \\ 0{,}50 & 0{,}33 & 0 & 1 & & & & & \\ 0{,}20 & 0 & 0{,}33 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0{,}20 & 0{,}50 & 1 & 1 & 1 & & & \\ 0{,}14 & 0 & 0{,}20 & 0{,}50 & 0{,}33 & 0 & 1 & & \\ 0{,}25 & 0{,}14 & 0 & 0{,}20 & 0 & 0{,}33 & 1 & 1 & \\ 0{,}33 & 0{,}25 & 0{,}14 & 0 & 0{,}20 & 0{,}50 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [K_{sr}] \,. \qquad (13)$$

Na podstawie tablicy (13) można wyodrębnić (zgodnie z warunkiem (10) trzy fazy o stabilnym kierunku przeobrażeń: faza I okresy 1 - 4; faza II okresy 5 - 7; faza III okresy 8 - 10.

Z uwagi na to, że pewne struktury mogą stanowić koniec jednej fazy lub początek następującej po niej, więc proces tworzenia faz o stabilnym kierunku przeobrażeń należy przeprowadzać chronologicznie rozpoczynając od okresu pierwszego.

Jak słusznie zauważa K. Kukuła w pracy [1] dopiero łączne stosowanie miar natężenia[1] zmian strukturalnych i miar stabilności kierunku przeobrażeń struktury pozwala osiągnąć znaczne efekty interpretacyjne w badaniach dynamiki struktur. Wynika to stąd, że istotnym zmianom strukturalnym w badanym okresie nie musi odpowiadać stabilność kierunku przeobrażeń poszczególnych elementów w strukturze i odwrotnie. Płynie stąd wniosek, że badania zmian natężenia przekształceń strukturalnych oraz stabilności kierunku przeobrażeń struktury niosą odrębne (ale uzupełniające się) informacje w kwestii dynamiki struktur.

LITERATURA

[1] Kukuła K.: Przeobrażenia struktury rolniczych usług produkcyjnych w Polsce. "Wiadomości Statystyczne" 1986 nr 11, s. 12-15.

[2] Walesiak M.: Metody klasyfikacji w badaniach strukturalnych. Rozprawa doktorska. Wrocław: AE 1985 (maszynopis).

[1] Wśród miar natężenia zasadnicze znaczenie posiada miara Bray'a i Curtisa [2] .

A METHOD OF SEPARATING PHASES WITH A STABLE DIRECTION OF ELEMENTS EVOLWING IN A STRUCTURE

Summary

The article presents a method of separating phases with a stable direction of elements evolving in a structure based on the modified version of the monotonicity measure for structures in the form (8).

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ФАЗ СО СТАБИЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИОНИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ В СТРУКТУРЕ

Резюме

В работе представлено метод выделения фаз со стабильным направлением эволюционирования элементов в структуре, основанной на модифицированном варианте меры монотонности структур с видом /8/.